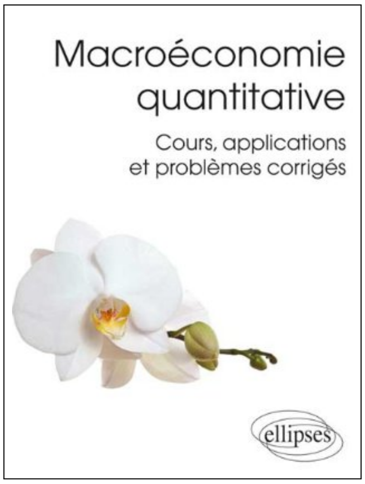


Application Chapitre 10 (corrigé)

Hétérogénéité et inégalité

Dans ce document, je propose une correction de l'application du Chapitre 10 de mon manuel de Macroéconomie quantitative (p.134). Les fonctions et les données utiles sont disponibles sur mon site [a]. Un ou plusieurs scripts Octave/Matlab accompagnent également ce document, dont une partie des éléments qui sont repris et commentés ici, apparaissent sous une police à `chasse fixe`.

a. www.christophecahn.fr/macroquant

Le modèle d'Aiyagari

On considère la version stationnaire du modèle d'Aiyagari dans lequel les ménages cherchent à résoudre le problème

$$v(a,s) = \max_{c,a'}\left\{\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta\mathsf{E}\{v(a',s')|s\}\right\}$$

sous les contraintes

$$c + a' \leq (1+r)a + ws,\ \ a' \geq -\phi$$

Dans ce modèle, l'incertitude porte sur la réalisation des unités efficaces de travail s. La contrainte de ressource agrégée est donnée par

$$C + \delta K = Y = ZK^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

1a Définir l'équilibre stationnaire concurrentiel de cette économie.

Réponse : On note A et S l'ensemble des valeurs de a et s respectivement. Le produit $A \times S$ définit alors l'espace état. On note $\mathscr{A}$ et $\mathscr{S}$ les tribus de Borel définies sur A et S. On note G la densité stationnaire du choc s. Pour un $B_s \in \mathscr{S}$, $G(B_s)$ est la probabilité d'observer s dans B_s. Un *équilibre stationnaire concurrentiel* est défini par une règle de décision g et une densité de probabilité λ, toutes deux définies sur $A \times S$, et un triplet de nombre réels (K, r, w) tels que

1. Les prix w et r vérifient
$$w = \frac{\partial Y}{\partial H} \ \text{ and } \ r = \frac{\partial Y}{\partial K} - \delta$$
2. La règle de décision g est solution du problème d'optimisation du ménage
$$v(a,s) = \max_{a' \in \Gamma(a,s)}\{u((1+r)a + ws - a') + \beta\mathsf{E}\{v(a',s')|s\}\},\ \forall (a,s) \in A \times S$$
où $\Gamma(a,s) = \{a' : -\phi \leq a' \leq (1+r)a + ws - c,\ c \geq 0\}$
3. La densité de probabilité λ est la densité stationnaire associée à g et la distribution G, c'est-à-dire qu'elle vérifie
$$\lambda(B) = \int_B \left\{\int_{A\times S} \mathbf{1}_{\{a'=g(a,s)\}} G(s')\mathrm{d}\lambda\right\}\mathrm{d}s'\mathrm{d}a'$$
pour $B = B_a \times B_s \in \mathscr{A} \times \mathscr{S}$, avec $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ qui vaut un si la proposition est vraie, zéro sinon

4. La valeur moyenne du capital K dérive des décisions des agents

$$K = \int_{A\times S} g \, \mathrm{d}\lambda$$

On considère l'étalonnage suivant : les paramètres de préférence sont $\gamma = 2$ et $\beta = 0.95$. Les unités efficaces de travail sont données par $s = \exp(y)$ avec y un processus AR(1)

$$y' = \rho y + \epsilon, \ \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

avec $\rho = 0.9$ et $\sigma = 0.1$.

1b Donner une approximation de ce processus en utilisant une chaîne de Markov à trois états. [markovappr]

Réponse : La fonction proposée calcule l'approximation par une chaîne de Markov discrete d'un processus AR(1).

```
rho = .9 ;
sig = .1;
nY  = 3;

[P,y,Pst]= markovappr(rho,sig,3,nY);
P   : matrice stochastique
y   : vecteur d'etats
Pst : distribution invariante de la chaîne de Markov

% On en profite pour calculer le travail efficace agrégé
H = exp(y)*Pst;
```

La contrainte d'endettement est fixée à $\phi = 0$. Le paramètre de la fonction de production est $\alpha = 0.3$. La valeur de Z est fixée de telle sorte que $w = 1$ à l'état stationnaire. Le taux de dépréciation est $\delta = 0.07$.

1c Calculer numériquement l'équilibre de cette économie. Ce faisant, tracer les fonctions d'offre et de demande de capital en fonction du taux d'intérêt r. [computeCapitalSupply,computeCapitalDemand,bisec

Réponse : On commence déjà par créer un objet model sous forme de structure, qui contiendra tous les paramètres.

```
model.params.gam    = 3 ;
model.params.bet    = .95 ;
model.params.alp    = .36 ;
model.params.dep    = .07 ;
model.params.sig    = sig ;
model.params.rho    = rho ;
model.params.Zed    = 1 ;
model.params.nStates  = nY ;
model.params.phi    = 0 ;
model.params.assetMax = 30 ;
model.params.nAssets  = 200 ;
model.params.mPr    = P ;
model.params.vStates  = exp(y) ;
model.params.lab   = H ;

model.options.tolOnDistribution = 1e-6 ;
```

Puis on calcule les courbes. On se donne une grille de taux d'intérêt et on calcule pour chaque r l'offre et la demande de capital correspondant.

```
% grille pour le taux d'intérêt
rmin = 0.033 ;
rmax = 0.051 ;
nr   = 10 ;
rate = linspace(rmin,rmax,nr)' ;

capitalSupply = zeros(nr,1) ;
capitalDemand = zeros(nr,1) ;

% et on itére
for ii=1:length(rate)
ii
capitalSupply(ii) = computeCapitalSupply(rate(ii),model) ;
capitalDemand(ii) = computeCapitalDemand(rate(ii),model) ;
end

figure;
plot(rate,capitalSupply,'bs',rate,capitalDemand,'r')
legend('Offre','Demande') ;
```

Pour résoudre l'équilibre, c.-à-d. trouver le taux d'intérêt, on utilise la bisection.

```
% Trouver le taux d'équilibre
disp('calcul du taux d''équilibre');
f = @(r) computeCapitalSupply(r,model) - computeCapitalDemand(r,model) ;
rsol = bisection(f,[rmin rmax]) ;
yaxis = get(gca,'YLim') ;
line([rsol rsol], [yaxis(1) computeCapitalDemand(rsol,model)]) ;
```

Et on trouve un taux d'intérêt d'équilibre de $4,67\%$.

2a Simuler un panel de 1000 ménages sur 200 périodes (éliminer les 100 premières observations). Calculer les statistiques suivantes : taux d'épargne agrégé (S/Y), écart-type du logarithme de la consommation, écart-type du logarithme du revenu des ménages.

Réponse :

Le code ci-dessous permet d'obtenir les simulations.

```
% simulations
T     = 300 ;
nI    = 1000 ;
dr    = computeDecisionRule(rsol,model) ;
psi   = computeInvariantDistribution(dr,model) ;
amin  = model.params.phi ;
amax  = model.params.assetMax ;
na    = model.params.nAssets ;
grida = linspace(amin,amax,na) ;
r     = rsol ;
alp   = model.params.alp ;
```

```
Zed   = model.params.Zed ;
dep   = model.params.dep ;
w     = (1-alp)*(Zed*(alp/(r+dep))^alp)^(1/(1-alp));

% allocation de la memoire pour accelerer le code
a = zeros(nI,T) ;
c = zeros(nI,T) ;
s = zeros(nI,T) ;

for jj=1:nI
% simulation pour un menage
% On commence par trouver un etat initial tire
% dans la distribution stationnaire des chocs
% de productivité
[tmp,s1] = min(rand(1) >= cumsum(Pst)) ;
[s_t,s_id] = markov(P,T,s1,exp(y));
s_id = [((1:nY)'==s1),s_id];
% meme chose pour la richesse initiale
[tmp,a0] = min(rand(1) >= cumsum(sum(psi,2))) ;
% simulation
s(jj,1) = exp(y(s1)) ;
s(jj,2:T) = s_t ;
a(jj,1) = a0 ;

for ii=1:T-1
    % on selectionne la regle de decision correspondante
    % au choc pour trouver l'indice de a'
a1 = dr(a(jj,ii),:)*s_id(:,ii) ;
a(jj,ii+1) = a1 ;
c(jj,ii) = (1+r)*grida(a(jj,ii)) + w*s(jj,ii) - grida(a(jj,ii+1));
end
a1 = dr(a(jj,T),:)*s_id(:,T) ;
c(jj,T) = (1+r)*grida(a(jj,end)) + w*s(jj,end) - grida(a1);
end
```

On peut également calculer les agrégats

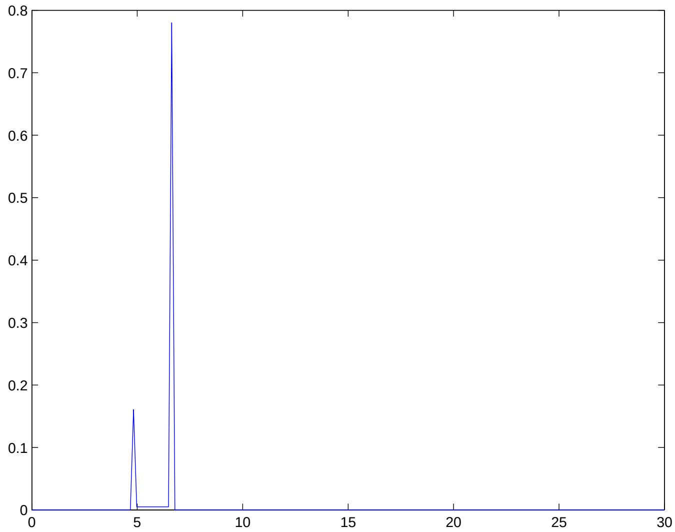
```
% calcul des agregats
C = mean(c(:,101:end));
A = mean(grida(a(:,101:end)));
Y = Zed*A.^alp*H^(1-alp) ;
savings = 1-C./Y ;
```

2b Dresser le graphe de la distribution stationnaire [`hist`] et calculer la part de la richesse détenue par les 5% les plus pauvres, les 5% les plus riche, le niveau médian de la richesse et la richesse moyenne. Enfin, calculer l'indice de Gini.

```
% histogramme
hist(grida(a(:,T)))

plot(grida,sum(psi,2))
```

Figure 1 – Histogramme



```
disp('quantile')
y = quantile(grida(a(:,end)),[.05 .5 .95])


% gini coefficient and lorenz curve
[N,X] = hist(grida(a(:,end)));
gini(X',N')

plot([0 cumsum(N)/nI],[0 cumsum(X.*N)/sum(grida(a(:,end)))])
axis([0 1 0 1])
line([0 1],[0 1])
```

On obtient alors

```
quantile
y =
    4.8241    6.6332    6.6332

ans =
    0.0862
```

Troisième partie

3 Reprendre le problème à partir de la question **1c** pour une contrainte d'endettement moins serrée $\phi = s_{\min}/r$. Commenter.

Figure 2 – Diagramme de Lorenz